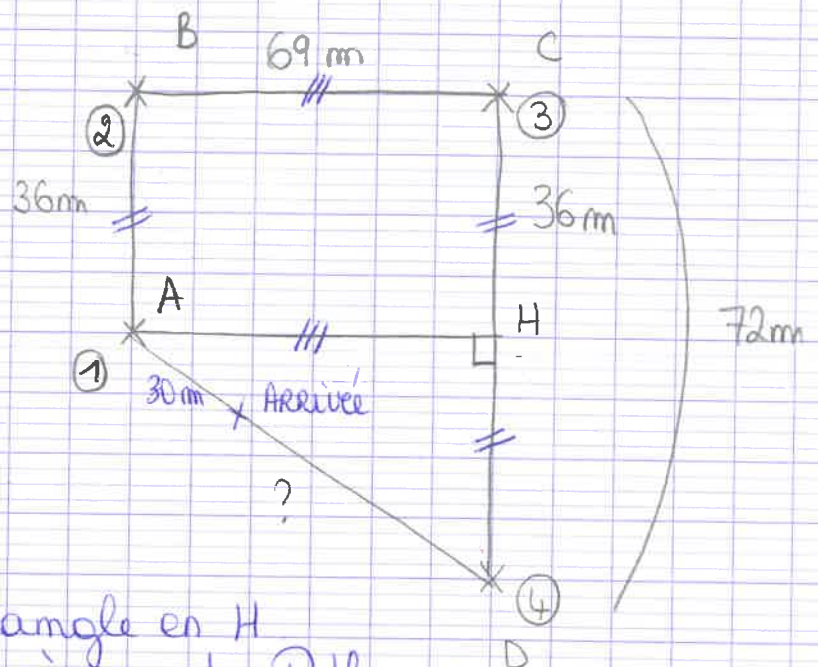


Théorèmes de Géométrie

ex 1



- AHD est rectangle en H
d'Après le théorème de Pythagore

on a :

$$AD^2 = AH^2 + HD^2$$

$$AD^2 = (69m)^2 + (36m)^2$$

$$AD^2 = 4\,761m^2 + 1\,296m^2$$

$$AD^2 = 6\,057m^2$$

Donc $AD \approx 78m$

- $P = 36m + 69m + 72m + 78m$
 $P = 255m$

$$1,5 km = \underline{1\,500 m}$$

$$5 \times 255m = 1\,275m \rightarrow 5 \text{ tours complets}$$

$$1\,500m - 1\,275m = 225m$$

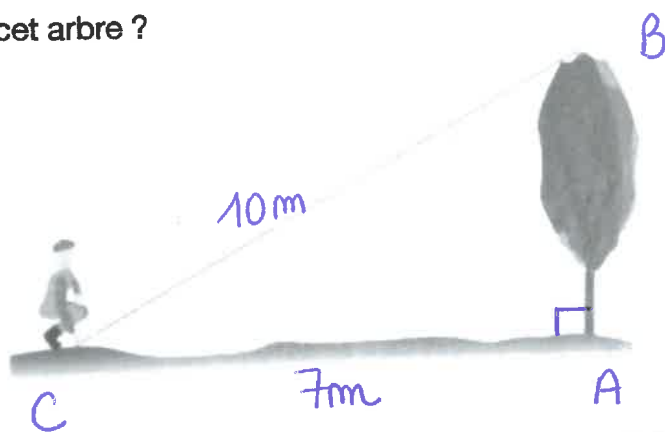
$$255m - 225m = 30m$$

Donc 30m avant le plot ① sur AD.

ex 5

Exercice Jean veut connaître la hauteur de l'arbre planté dans son jardin. Avec un mètre laser, il a relevé 10m entre sa position et la cime de l'arbre. Il a aussi mesuré qu'il se trouvait à 7m du pied de l'arbre.

Quelle est la hauteur de cet arbre ?



Compétences travaillées :

- Chercher
- **Modéliser**
- Communiquer

ABC est rectangle en A. L'arbre pousse perpendiculairement au sol (MODÉLISER)

on utilise le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en A.

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

$$(10m)^2 = BA^2 + (7m)^2$$

$$\text{donc } BA^2 = 100m^2 - 49m^2 = \underline{51m^2}$$

$$\text{d'où } BA = \sqrt{51m^2} \approx \underline{7,14m}$$

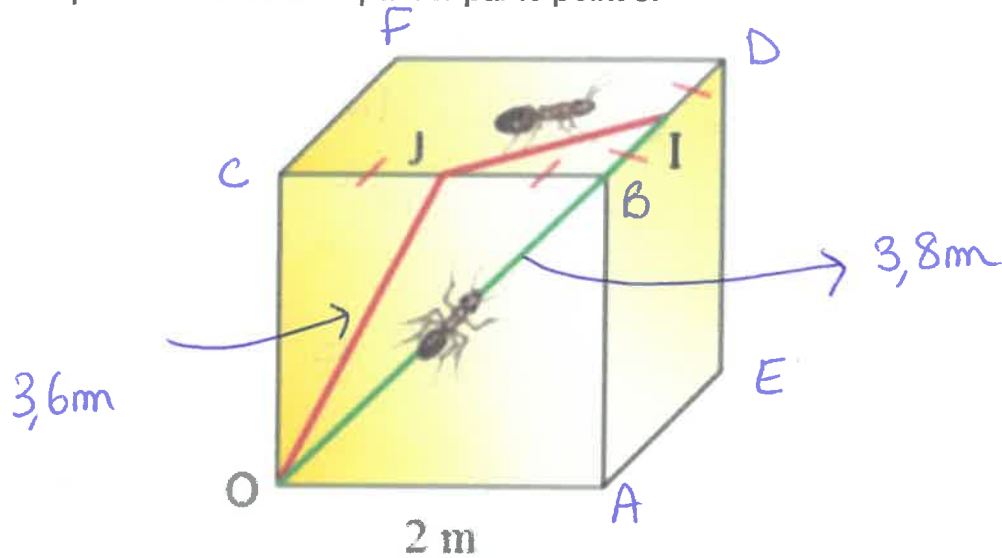
donc la hauteur de

l'arbre est de 7,1m environ.

ex 7

Exercice Deux fourmis se déplacent à la même vitesse sur les faces d'un cube de O à I :

- La première fourmi se déplace de O à I en passant par J ;
- L'autre se déplace de O à I sans passer par le point J.



Laquelle des deux mettra le moins de temps ?

Celle qui passe pas J

Compétences travaillées : Chercher – Modéliser

Coups de pouce :

1. Quelles sont les longueurs manquantes sur le trajet des fourmis ?
2. Déterminer les longueurs en isolant des triangles et en utilisant Pythagore/

Compétences évaluées :

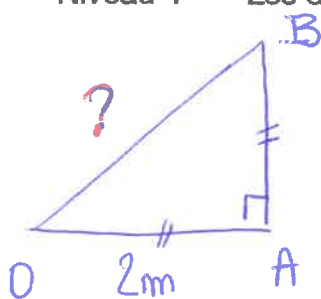
Modéliser = Traduire en langage mathématique une situation réelle (avec des configs géométriques)

Indicateurs pour l'évaluation :

1. L'élève schématise correctement la situation en y ajoutant les carrés portés par les côtés du triangle
2. L'élève calcule les aires des carrés et teste l'égalité de Pythagore

Niveaux :

- Niveau 2 Seul l'indicateur 1 est réussi (éventuellement avec des coups de pouce)
 Niveau 3 Les deux indicateurs sont réussis mais à l'aide d'au moins un coup de pouce
 Niveau 4 Les deux indicateurs sont réussis sans coup de pouce



OA.B est rect en A. On utilise le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} OB^2 &= OA^2 + AB^2 \\ &= (2m)^2 + (2m)^2 \\ &= 4m^2 + 4m^2 \\ &= 8m^2 \end{aligned}$$

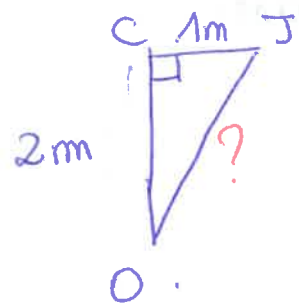
donc $OB = \sqrt{8m^2} \approx \underline{2,8m}$

$BI = \frac{1}{2} BD$ donc $BI = 1m$

d'où

$$\begin{aligned} OI &= OB + BI \\ &\approx 2,8m + 1m \\ &\approx \underline{3,8m} \end{aligned}$$

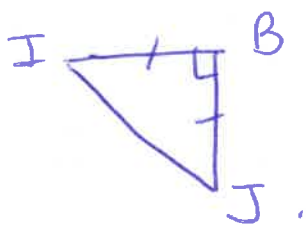
COJ est rectangle en C . On utilise le théorème de Pythagore



$$\begin{aligned} OJ^2 &= OC^2 + CJ^2 \\ &= (2m)^2 + (1m)^2 \\ &= 4m^2 + 1m^2 \\ &= 5m^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } OJ = \sqrt{5m^2} \approx \underline{2,2m}$$

IJB est rectangle en B . On utilise le théorème de Pythagore.

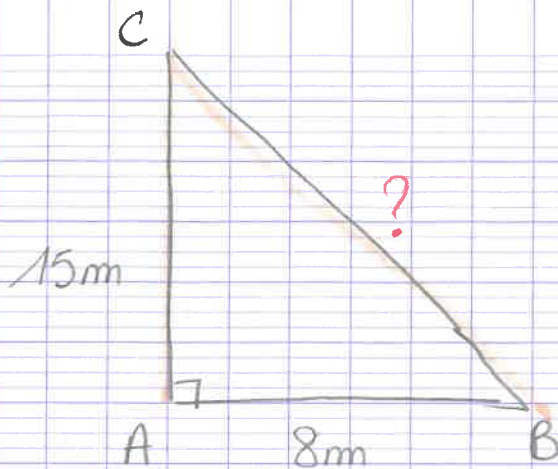


$$\begin{aligned} IJ^2 &= IB^2 + BJ^2 \\ &= (1m)^2 + (1m)^2 \\ &= 2m^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } IJ = \sqrt{2m^2} \approx \underline{1,4m}$$

$$\text{Donc } OJ + JI \approx 2,2m + 1,4m \\ \approx \underline{3,6m}$$

ex 3



ABC est rectangle en A
D'après le théorème de Pythagore on a

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = (8m)^2 + (15m)^2$$

$$BC^2 = 64m^2 + 225m^2$$

modélisation du poteau = 289m²

Donc

$$BC = \sqrt{289m^2}$$

$$BC = \underline{17m}$$

On cherche la hauteur du Poteau avant
la tempête

$h = AC + CB$ ← encore en place
 $h = 15m + 17m$ ← partie cassée
 $h = \underline{32m}$

ex 4

Basket

Dans ABC rectangle en B on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(3,20m)^2 = AB^2 + (1,15m)^2$$

$$10,24m^2 = AB^2 + 1,3225m^2$$

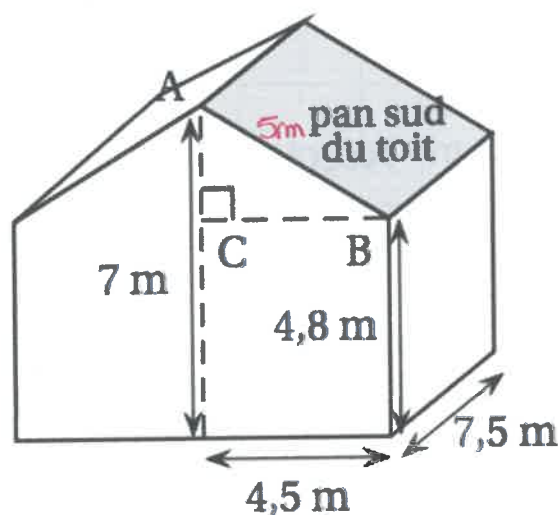
donc $AB^2 = 10,24m^2 - 1,3225m^2 = 8,9175m^2$

et $AB = \sqrt{8,9175m^2} \approx \underline{2,99m} < 3m$

Donc elle peut récupérer le ballon en sautant.

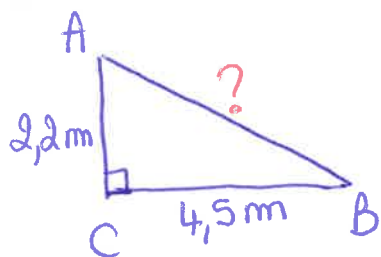
ex 6

Exercice Une personne souhaite installer des panneaux photovoltaïques sur la partie du toit de sa maison orientée au sud. Cette partie est grisée sur la figure ci-dessous. Elle est appelée pan sud du toit.



$$7\text{ m} - 4,8\text{ m} = 2,2\text{ m}$$

La production d'électricité des panneaux solaires dépend de la superficie du pan sud du toit. Calculer cette superficie.



donc on utilise le théorème de Pythagore
dans ABC rectangle en C.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= (2,2\text{ m})^2 + (4,5\text{ m})^2 \\ &= 4,84\text{ m}^2 + 20,25\text{ m}^2 \\ &= 25,09\text{ m}^2 \end{aligned}$$

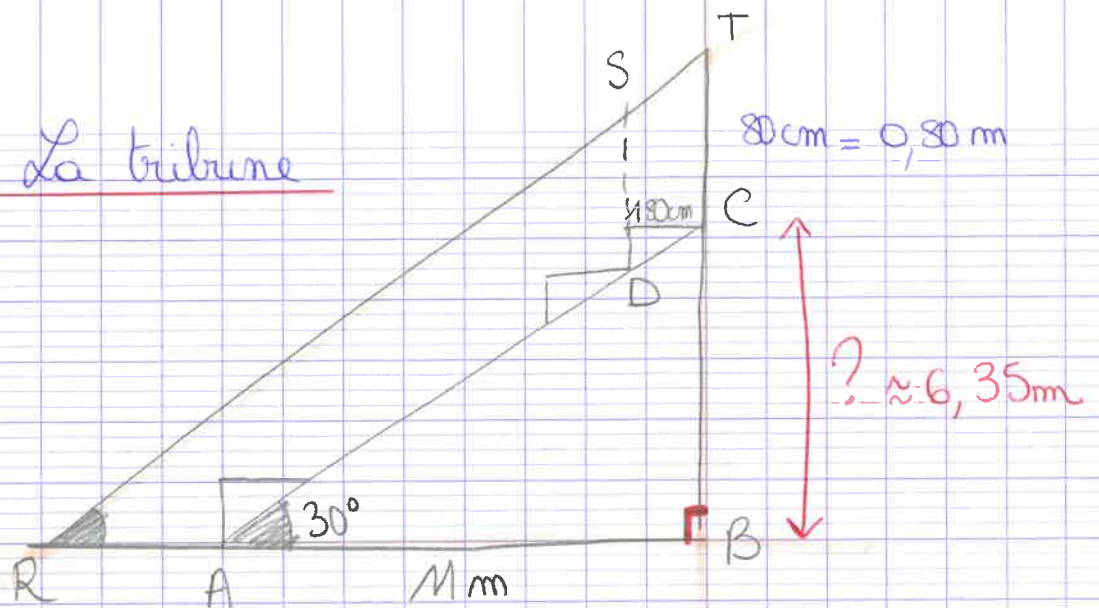
$$\text{donc } AB = \sqrt{25,09\text{ m}^2} \approx \underline{5\text{ m}}$$



$$\begin{aligned} A &\approx 5\text{ m} \times 7,5\text{ m} \\ A &\approx \underline{37,5\text{ m}^2} \end{aligned}$$

La superficie du pan sud est $\approx 37,6\text{ m}^2$

ex 16 : La tribune



1) ABC est rectangle en B

donc

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB}$$

et $\tan 30^\circ = \frac{?}{11m}$

donc $1 \times ? = 11m \times \tan 30^\circ$

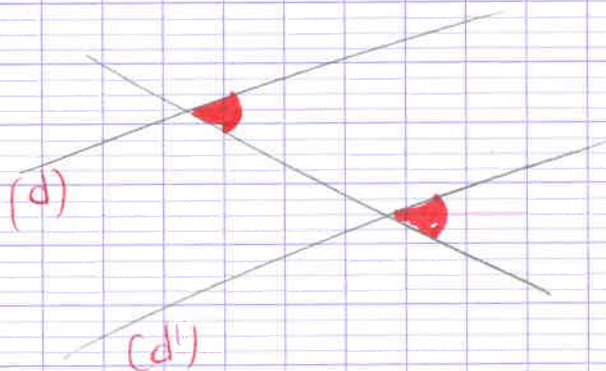
$$? = \frac{11\sqrt{3}}{3} m$$

$? \approx 6,35m$

2 $\hat{BRT} = \hat{BAC}$ car $(RT) \parallel (AC)$ ils qu'ils
ils sont correspondants

5°

RAPPELS



▲ sont correspondants

Si (d) et $(d') \parallel$
Alors ils sont =

3) $(AC) \parallel (RT)$
 $A \in (RB)$
 $C \in (BT)$

D'après le théorème de Thalès

$$\frac{AB}{RB} = \frac{BC}{BT}$$

$$\frac{11\text{ m}}{RB} = \frac{11\text{ m} \times \tan 30^\circ}{11\text{ m} \times \tan 30^\circ + 0,8\text{ m}}$$

$$RB \times (11\text{ m} \times \tan 30^\circ) = 11\text{ m} \times (11\text{ m} \times \tan 30^\circ + 0,8\text{ m})$$

donc $RB \approx 12,39\text{ m}$

donc $RA = RB - AB$
 $RA \approx 1,39\text{ m}$

Rmq : autre méthode

Dans $\triangle RBT$ rectangle en B

$$\tan R = \frac{TB}{RB}$$

donc $\tan 30^\circ = \frac{(11\text{ m} \times \tan 30^\circ + 0,8\text{ m})}{RB}$

donc $RB = \frac{11\text{ m} \times \tan 30^\circ + 0,8\text{ m}}{\tan 30^\circ}$

$$RB \approx 12,39\text{ m}$$

et $RA = RB - AB$

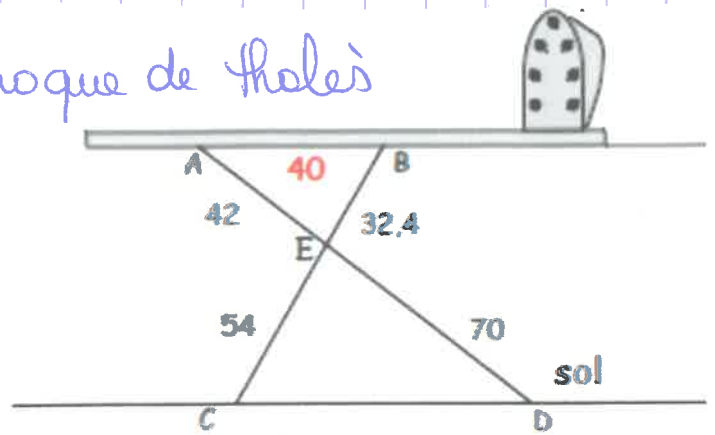
et $RA \approx 1,39\text{ m}$

Exercice 8 : planche à repasser

L'unité de longueur est le cm.

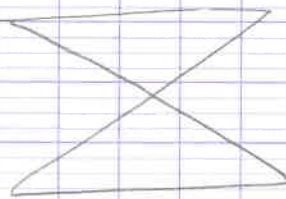
La table à repasser est-elle
parallèle au sol ?

Récyproque de Thalès



Rmq

① on reconnaît une configuration
de Thalès



"papillon"

homothétie $k < 0$

② $(AB) ? \parallel (CD)$: pour le démontrer
on utilise la Récyproque

A, E, D d'une part et B, E, C d'autre
part sont alignés dans le même ordre

On calcule :

$$\frac{EB}{EC} = \frac{32,4 \text{ cm}}{54 \text{ cm}} = 0,6$$

$$\frac{EA}{ED} = \frac{42 \text{ cm}}{70 \text{ cm}} = 0,6$$

Donc $\frac{EB}{EC} = \frac{EA}{ED} = 0,6$ donc d'après

la Récyproque de Thalès on a $(AB) \parallel (CD)$

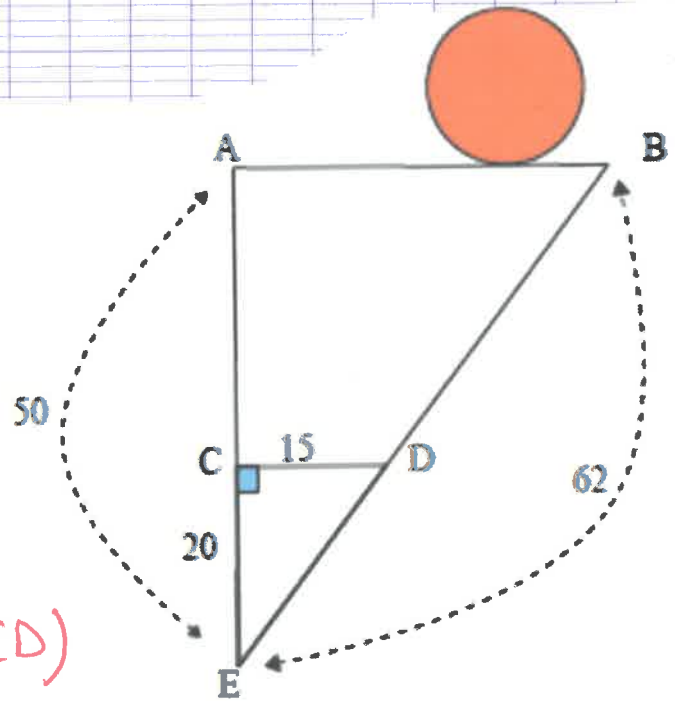
ex 9

L'unité de longueur est le cm.

Une étagère [AB] est fixée contre un mur vertical [AE].

Le support [CD] est horizontal.

On pose un ballon de basket sur l'étagère, va-t-il rouler ?



On veut savoir si (AB) // (CD)

↓
Réciproque Thalès

↓
Besoin de ED (1)

↓
Théorème Pythagore (2)

(1) CED est rectangle en C
D'après le théorème de Pythagore
on a :

$$\begin{aligned} ED^2 &= CD^2 + CE^2 \\ &= (15\text{cm})^2 + (20\text{cm})^2 \\ &= 225\text{cm}^2 + 400\text{cm}^2 \\ &= 625\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } ED = \sqrt{625\text{cm}^2} = \underline{25\text{cm}}$$

ex 9 suite

- (2) **E**, C et A sont alignés d'une part
et **E**, D et B // // d'autre part dans
le même ordre

On calcule

$$\frac{EC}{EA} = \frac{20\text{cm}}{50\text{cm}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{ED}{EB} = \frac{25\text{cm}}{62\text{cm}} \neq 0,4$$

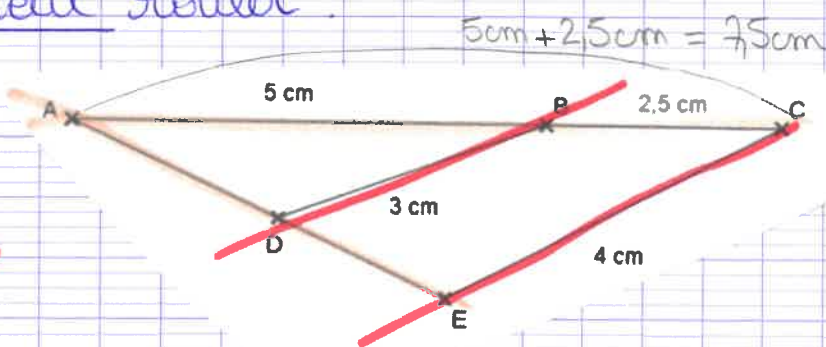
Donc $\frac{EC}{EA} \neq \frac{ED}{EB}$

Donc l'égalité de Thalès n'est pas vérifiée
Donc (CD) n'est pas // à (AB)

Le ballon peut rouler.

ex 10

(DB) // ? (EC)
Réciproque de Thalès.



A, D et E d'une part
A, B et C d'autre part sont alignés dans le même
ordre

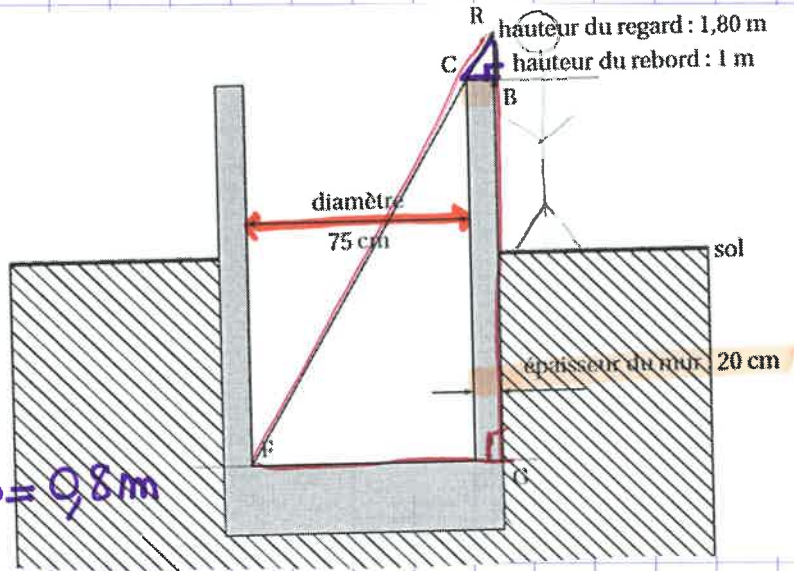
$$\frac{AB}{AC} = \frac{5\text{cm}}{7.5\text{cm}} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{DB}{EC} = \frac{3\text{cm}}{4\text{cm}} = \frac{225}{300}$$

$\frac{AB}{AC} \neq \frac{DB}{EC}$ l'égalité
n'est pas vérifiée
donc (DB) n'est pas
// à (EC).

ex 11

Un jeune berger se trouve au bord d'un puits de forme cylindrique dont le diamètre vaut 75 cm : il aligne son regard avec le bord inférieur du puits et le fond du puits pour en estimer la profondeur. Le fond du puits et le rebord sont horizontaux, le puits est vertical.



1) En s'aidant du schéma, donner les longueurs CB, FG et RB en mètres.

$CB = 20 \text{ cm}$ $FG = 95 \text{ cm}$ $RB = 0,8 \text{ m}$

2) Calculer la profondeur du puits.

1) $RB = 1,80 \text{ m} - 1 \text{ m} = 0,8 \text{ m}$

$CB = 20 \text{ cm} = 0,20 \text{ m} = 0,2 \text{ m}$

$FG = \text{diamètre} + CB = 75 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 95 \text{ cm} = 0,95 \text{ m}$

2) Calcul de BG

sumq

① on veut calculer une longueur
② on se reconnaît une configuration de Thalès



homothétie $k > 0$.

$B \in (RG)$
 $C \in (RF)$
 $(CB) \parallel (FG)$ car toutes les $\perp$ à (RG)

D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{RB}{RG} = \frac{RC}{RF} = \frac{CB}{FG}$$

ex suite

$$\frac{0,8m}{RG} = \frac{RC}{RF} = \frac{0,2m}{0,95m}$$

Donc

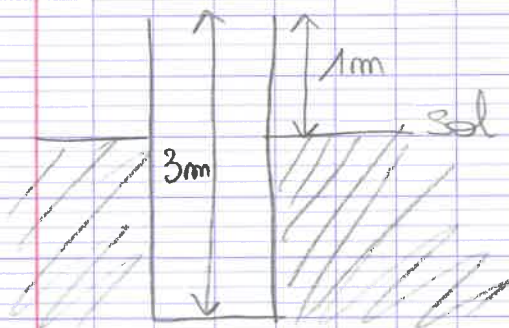
$$RG \times 0,2m = 0,8m \times 0,95m$$

$$RG \times 0,2m = 0,76m^2$$

$$RG = \frac{0,76m^2}{0,2m}$$

$$RG = 3,8m$$

Donc $h = RG - 0,8m = 3,8m - 0,8m = 3m$



il y a 2m (en dessous)
dans sol
le

ex 13 Tabouret

D'après le triangle ABG :

- $(CD) \parallel (AB)$ ✓
- $C \in (GB)$ ✓
- $D \in (GA)$ ✓

D'après le théorème de Thalès on a :

$$ABG \rightarrow \frac{AB}{GB} = \frac{AG}{CG}$$

$$CDG \rightarrow \frac{CD}{CG} = \frac{DG}{AG}$$

$$\frac{51cm}{45cm} = \frac{AG}{30cm}$$

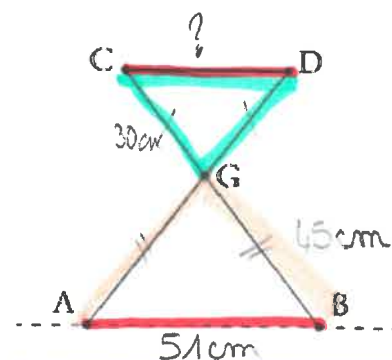
$$\frac{51cm}{45cm} = \frac{AG}{30cm}$$

$$30cm \times 51cm = 1530cm^2$$

$$1530cm^2 \div 45cm = 34cm$$

La longueur CD mesure 34cm

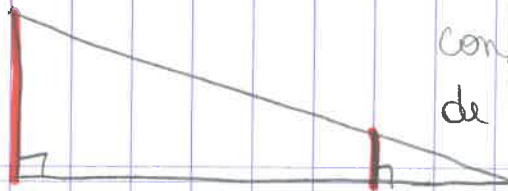
configuration de Thalès
parallèles



homothétie $k < 0$

↑ Rédaction PARFAITE d'un élève de 4^e

ex 12

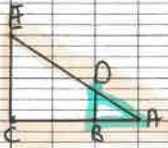


configuration de Thales

homothétie $\rightarrow$

4/4

Pour brasser la hauteur de la Tour Eiffel il faut utiliser le théorème de Thalès



$(EC) \parallel (DB)$
 $CB = 497,3 \text{ m}$
 $BA = 2,7 \text{ m}$
 $DB = 1,75 \text{ m}$
 Calculer EC

Dans le triangle ABC
 $E \in (CA)$
 $C \in (BA)$
 $(EC) \parallel (DB)$

$500 \text{ m} = 497,3 \text{ m} + 2,7 \text{ m}$

D'après le théorème de Thalès

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{EC}$

On remplace par les valeurs

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{EC}$
 $\frac{2,7 \text{ m}}{500 \text{ m}} = \frac{1,75 \text{ m}}{EC}$

$\frac{2,7 \text{ m}}{500 \text{ m}} = \frac{1,75 \text{ m}}{EC}$

$EC \propto 2,7 \text{ m} = 500 \text{ m} \propto 1,75 \text{ m}$

$EC \propto 2,7 \text{ m} = 875 \text{ m}^2$

$\propto 2,7 \text{ m}$ donne 875 m^2

DB

Donc

$EC = \frac{875 \text{ m}^2}{2,7 \text{ m}}$

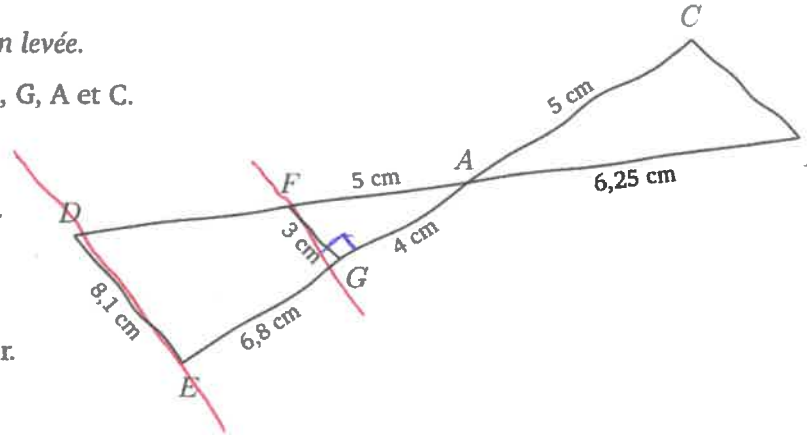
$2,7 \text{ m}$

$EC \approx 324 \text{ m}$

Exercice 15 :

Pour illustrer l'exercice, la figure ci-contre a été faite à main levée.

Les points D, F, A et B sont alignés, ainsi que les points E, G, A et C.
De plus, les droites (DE) et (FG) sont parallèles.



- 1) Montrer que le triangle AFG est un triangle rectangle.
- 2) Calculer la longueur du segment [AD].
En déduire la longueur du segment [FD].
- 3) Les droites (FG) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

1) Dans le triangle AFG, [FA] est le plus grand côté
on calcule :
 $FA^2 = (5\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2$
puis
 $FG^2 + GA^2 = (3\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2 = 25\text{ cm}^2$
comme $FA^2 = FG^2 + GA^2$, l'égalité de Pythagore est
vérifiée donc AFG est rectangle en G.

2) Dans AGF on a :

$$E \in (AG)$$

$$D \in (FA)$$

$$(DE) \parallel (FG)$$

D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AE} = \frac{FG}{DE}$$

$$\frac{5\text{cm}}{AD} = \frac{4\text{cm}}{10,8\text{cm}} = \frac{3\text{cm}}{8,1\text{cm}}$$

$$\text{donc } AD = \frac{5\text{cm} \times 10,8\text{cm}}{4\text{cm}}$$

$$\underline{AD = 13,5\text{cm}}$$

$$\text{et } FD = AD - FA = 13,5\text{cm} - 5\text{cm}$$
$$\underline{FD = 8,5\text{cm}}$$

3) Les points F, A, B d'une part et G, A, C d'autre part sont alignés dans cet ordre

$$\left. \begin{array}{l} \text{On calcule : } \frac{AF}{AB} = \frac{5\text{cm}}{6,25\text{cm}} = 0,8 \\ \text{et } \frac{AG}{AC} = \frac{4\text{cm}}{5\text{cm}} = 0,8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc } \frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} \\ \text{et d'après la} \end{array}$$

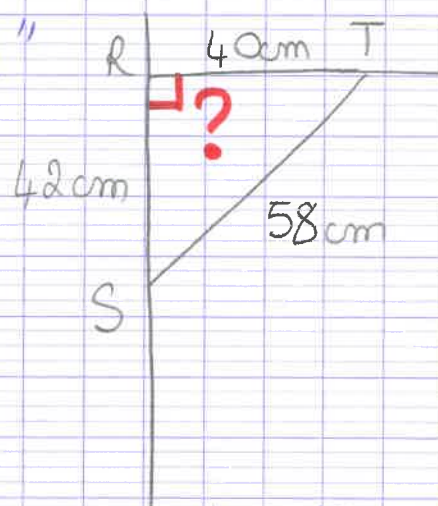
réci-proque du théorème de Thalès on a :

$$\underline{(FG) \parallel (BC)}$$

ex 18

rmq

"vertical" et "horizontal"



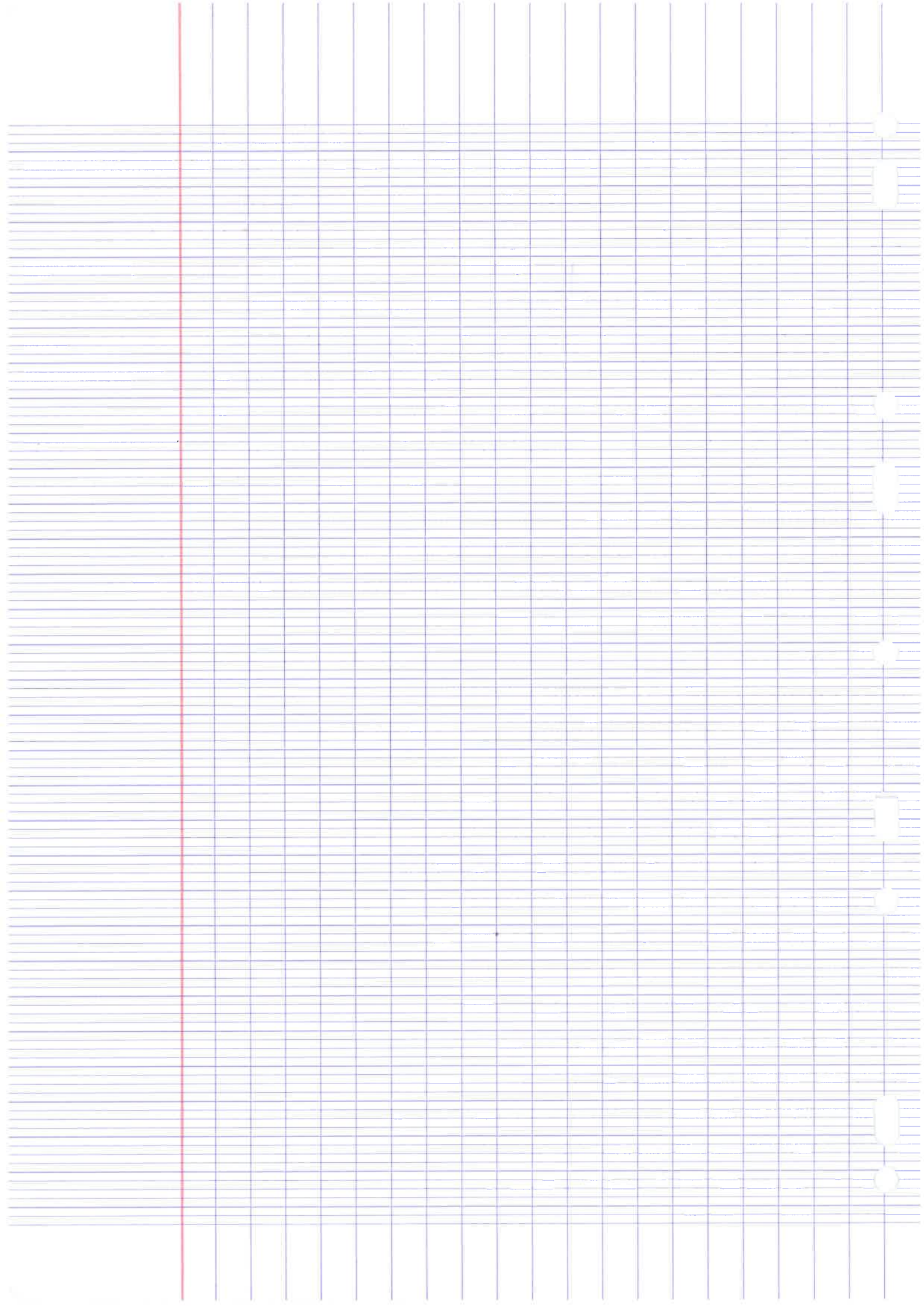
Dans RTS le plus grand côté est [TS]

$$\begin{aligned} TS^2 &= (58\text{cm})^2 \\ &= \underline{3\,364\text{ cm}^2} \end{aligned}$$

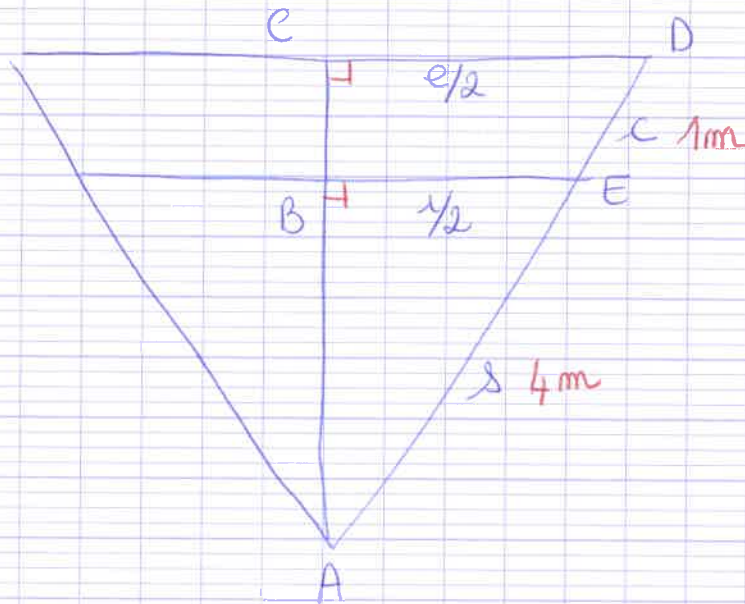
$$\begin{aligned} RT^2 + RS^2 &= (40\text{cm})^2 + (42\text{cm})^2 \\ &= 1\,600\text{ cm}^2 + 1\,764\text{ cm}^2 \\ &= \underline{3\,364\text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Donc $TS^2 = RT^2 + RS^2$
l'égalité est vérifiée
d'après la reciproque du théorème de Pythagore
RTS est rectangle en R

Donc $(RT) \perp (RS)$
L'étagère est bien horizontale



Parachute réparation



$$\frac{24}{5} \text{ m} \div 2 = \frac{24}{5} \times \frac{1}{2}$$

ACD est l'image de ABE par l'homothétie de centre A et de rapport

$$\frac{3 \text{ m}}{\frac{24}{5} \text{ m}} = 3 \text{ m} \times \frac{10}{24} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Donc $\frac{10}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ m}$

Donc $c = 5 \text{ m} - 4 \text{ m} = 1 \text{ m}$

Dans ACD rectangle en C on a :

D'après le théorème de Pythagore

$$CA^2 = (5 \text{ m})^2 - (3 \text{ m})^2 = 25 \text{ m}^2 - 9 \text{ m}^2 = 16 \text{ m}^2$$

Donc CA = 4 m

inutile

Comme ACD est un agrandissement ABE

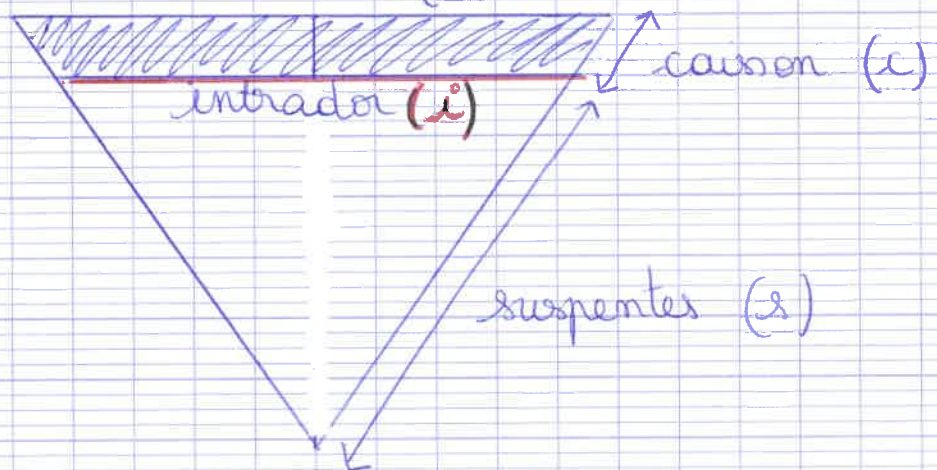
on a $AB = 4 \text{ m} \div \frac{5}{4} = 4 \text{ m} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} \text{ m}$

donc AB = 3,2 m

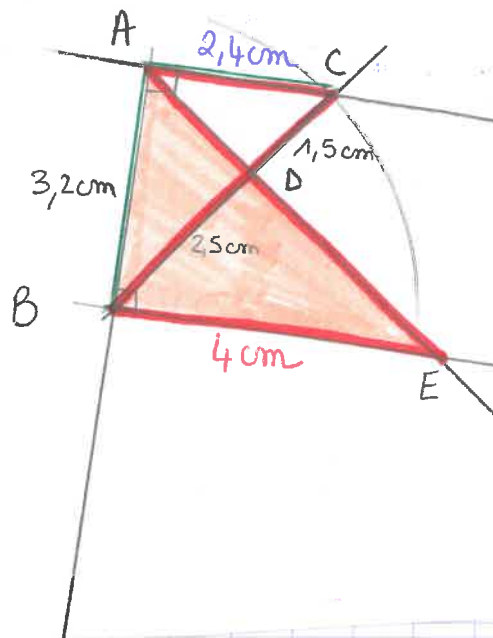
l'aire de la Voile est donc

$$A = \frac{6\text{ m} \times 4\text{ m}}{2} = \underline{12\text{ m}^2}$$

Schema simplifié d'un parachute type
"aile" posé extrados (e) au sol.



Géométrie



1. Calcul de AC

ABC est rectangle en A

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\ &= (4\text{cm})^2 - (3,2\text{cm})^2 \\ &= 16\text{cm}^2 - 10,24\text{cm}^2 \\ &= \underline{5,76\text{cm}^2} \end{aligned}$$

Donc $\underline{AC = 2,4\text{cm}}$

2. Calcul de BE

(AC) // (BE) car toutes les 2 $\perp$ à (AB)

ACD est une réduction de BDE

par l'homothétie de centre D et de rapport $-\frac{5}{3}$

$$\frac{2,5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$BE = \frac{5}{3} \times 2,4\text{cm} = \underline{4\text{cm}}$$

3. Calcul de AE

Dans ABE rectangle en B d'après Pythagore

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

$$AE^2 = (3,2\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2$$

$$AE^2 = 10,24\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2$$

$$AE^2 = 26,24\text{cm}^2$$

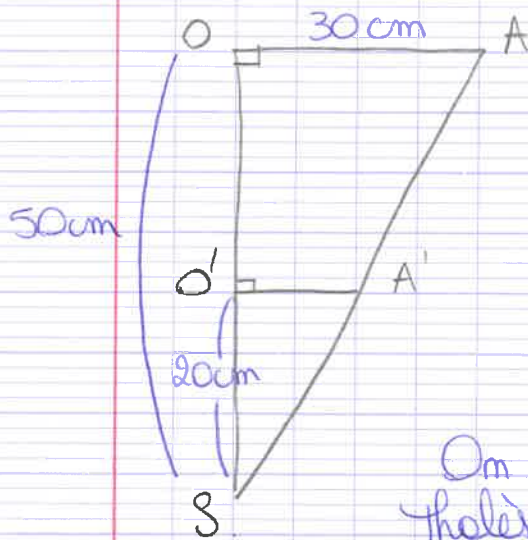
Donc $AE \approx 5,1\text{cm}$

4. Calcul de l'Aire de ABE triangle rectangle B

$$ct_{ABE} = \frac{BE \times AB}{2} = \frac{4\text{cm} \times 3,2\text{cm}}{2} = \underline{6,4\text{cm}^2}$$

inutile

Réceptient de Sel



$$\begin{aligned}(O'A') &\perp (OS) \\ (OA) &\perp (OS) \\ \text{donc } (O'A') &\parallel (OA)\end{aligned}$$

On a une configuration de Thalès

(ou) $\triangle O'A'S$ est un triangle semblable de $\triangle OAS$ de centre S et de rapport $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{20\text{cm}}{50\text{cm}} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow V_{\text{réceptient}} = V_2 - V_1$$

$$\bullet V_1 = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times O'A'^2 \times 20\text{cm}}{3}$$

calcul de $O'A'$:

$$O'A' = OA \times 0,4 = 30\text{cm} \times 0,4 = 12\text{cm}$$

$$\text{donc } V_1 = \frac{\pi \times (12\text{cm})^2 \times 20\text{cm}}{3} = 960\pi \text{ cm}^3 \approx 3016 \text{ cm}^3$$

$$\bullet V_2 = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times (30\text{cm})^2 \times 50\text{cm}}{3} = 15000\pi \text{ cm}^3 \approx 47124 \text{ cm}^3$$

$$\bullet V_{\text{réceptient}} = 15000\pi \text{ cm}^3 - 960\pi \text{ cm}^3 = 14040\pi \text{ cm}^3 \approx 44108 \text{ cm}^3$$

$$\rightarrow \mu = 2,16 \text{ kg/L}$$

$$V \approx 44,108 \text{ cm}^3$$

dm ³	cm ³
44	108

$$1\text{L} = 1\text{dm}^3$$

donc $V \approx 44,108\text{-dm}^3$ soit 44,108 L

44,108 L	1 L
? kg	2,16 kg

$$2,16 \times 44,108 \approx 95,27$$

$$\frac{95,27}{1} = 95,27 \text{ kg}$$

Donc il y a $\approx 95 \text{ kg}$ de sel