3° FE - Calcul littéral

Exercice 1 : Répartir si possible les expressions suivantes dans le tableau (x est un nombre quelconque) :

$A = x^2 + 4$ $\quad B = (2x+3)^2$ $\quad C = 4x^2$ $\quad D = 1 + x^2$ $\quad E = (5x)^2 + 3^2$

CARRÉ D'UNE SOMME	CARRÉ D'UN PRODUIT	SOMME DE CARRÉS	PRODUIT DE DEUX CARRÉS

Exercice 2: Lorsque cela est possible, écrire plus simplement les expressions suivantes (*x, y, a* et *b* sont des nombres quelconques ; dans la troisième série, *a* est différent de zéro) :

1ERE SÉRIE	2E SÉRIE	3E SÉRIE
a) $0 + x$	a) $x + x$	a) $a^3 \times \frac{a}{3}$
b) $1 \times x$	b) $y - y + y$	b) $a \times b \times a \times b$
c) $0 \times x + x \times 1$	c) $x^2 + x^2$	c) $\frac{x}{1} + \frac{0}{1}$
d) $(x+y) \times (0+1)$	d) $\frac{a}{4} \times \frac{a}{4}$	d) $x \times x \times 1 \times x$
e) $0 \times x \times x^2$	e) $a \times b + b \times a$	e) $2 \times \frac{a^2}{a}$
f) $y \times 1 - x \times 0$	f) $\frac{x}{3} \times \frac{y}{5}$	f) $\frac{a^3}{3 \times a^2}$

Exercice 3: Vrai ou Faux ?

1ERE SÉRIE	2E SÉRIE	3E SÉRIE
a) $x \times 0 = 0$	a) $a \times 2 \times b = a2b$	a) $x \times \frac{1}{7} \times x = \frac{x^2}{7}$
b) $x \times x = 2x$	b) $3 \times t = 3t$	b) $3 - (x+2) = 3(x+2)$
c) $2 + 2x = 4x$	c) $5 + x = 5x$	c) $7 \times (x-8) = 7x - 8$
d) $x + x = x^2$	d) $\frac{3}{4} \times x = \frac{3x}{4}$	d) $(1+x)^2 = (1+x) \times (1+x)$
e) $x \times 1 = x$	e) $(5x)^2 = 5x^2$	e) $(7+x) \times (8+y) = 7x + 8y$
	f) $-2x + 4x = -6x$	

Exercice 4:

LORSQUE CELA EST POSSIBLE, ÉCRIRE SOUS LA FORME D'UNE SOMME :	LORSQUE CELA EST POSSIBLE, ÉCRIRE SOUS LA FORME D'UN PRODUIT :
a) $3(2+a)$	a) $x^2 - 5x$
b) $5x(1-x)$	b) $3 + 2x$
c) $\frac{4p+3}{7}$	c) $a - 7a^2$
	d) $6t^2 + 3t$

Exercice 5 :

Léa pense qu'en multipliant deux nombres impairs consécutifs (c'est-à-dire qui se suivent) et en ajoutant 1, le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.

1. Étude d'un exemple : 5 et 7 sont deux nombres impairs consécutifs.

a. Calculer $5 \times 7 + 1$.

b. Cet exemple est-il en accord avec ce que pense Léa, ou bien Léa doit elle renoncer à son idée ?

2. Le tableau ci-dessous montre le travail qu'elle a réalisé dans une feuille de calcul.

	A	B	C	D	E
1		Nombre impair	Nombre impair suivant	Produit de ces nombres impairs consécutifs	Résultat obtenu
2	x	$2x+1$	$2x+3$	$(2x+1)(2x+3)$	$(2x+1)(2x+3)+1$
3	0	1	3	3	4
4	1	3	5	15	16
5	2	5	7	35	36
6	3	7	9	63	64
7	4	9	11	99	100
8	5	11	13	143	144
9	6	13	15	195	196
10	7	15	17	255	256
11	8	17	19	323	324
12	9	19	21	399	400

a. D'après ce tableau, quel résultat obtient-on en prenant comme premier nombre impair 17 ? Montrer que cet entier est un multiple de 4 .

b. Parmi les quatre formules de calcul tableur suivantes, deux formules ont pu être saisies sans la cellule D3. Cocher les deux formules choisies :

☐ Formule 1 : = (2*A3+1)*(2*A3+3) ☐ Formule 2 : =(2*B3+1)*(2*C3+3)

☐ Formule 3 : = B3*C3 ☐ Formule 4 : =(2*D3+1)*(2*D3+3)

3. Etude algébrique :

a. Développer et réduire l'expression : $E = (2x + 1)(2x + 3) + 1$.

b. Montrer que Léa avait raison : le résultat obtenu est toujours un multiple de 4 .

Exercice 6 :

On considère le programme de calcul ci-dessous :

· Choisir un nombre.

· Soustraire 6.

· Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi.

· Ajouter 9.

1. Vérifier que lorsque le nombre choisi est 11, le résultat du programme est 64.

2. Lorsque le nombre choisi est −4, quel est le résultat du programme ?

3. Théo affirme que, quel que soit le nombre choisi au départ, le résultat du programme est toujours un nombre positif. A-t-il raison?

Exercice 7 : Prouver que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

Exercice 8 : Prouver que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

Exercice 9 : On considère le programme de calcul suivant :

• Choisir un nombre entier positif.
• Ajouter 1.
• Calculer le carré du résultat obtenu.
• Enlever le carré du nombre de départ.

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. ***Montrer qu'on obtient 7.***
2. Voici deux affirmations :

Affirmation 1 : « Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7 ».
Affirmation 2 : « Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui le suit ».
Pour chacune de ces deux affirmations, expliquer si elle est vraie ou fausse quel que soit le nombre choisi au départ.

Exercice 10 :

69 Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif
- Mettre au carré
- Ajouter 3
- Multiplier par 2
- Soustraire 6
- Diviser par 2

Raccourcir ce programme de calcul.

Exercice 11 :

Le magicien : « Pensez à un nombre, multipliez-le par 2, enlever 3, multipliez le résultat par 3 et enlevez le nombre de départ. Quel est le nombre que vous obtenez ? »
Un spectateur : « 31 »
Le magicien : « Le nombre pensé au départ est ... »
Un spectateur : « C'est exact »

Quelle était la réponse du magicien ?

Exercice 12 : Que peut-on en penser ? expliquer.

« La somme de cinq nombres consécutifs est égale au quintuple du troisième. »

Exercice 13 :

Pour résoudre un problème, on a effectué successivement les opérations suivantes. Remplacer ces calculs séparés par une seule expression donnant le même résultat final.

a) $4 \times 7 = 28$
$28 - 5 = 23$
$23 \div 2 = 11{,}5$

b) $3 + 4 = 7$
$40 - 7 = 33$
$33 \times 5 = 165$

c) $7 + 12 = 19$
$13{,}5 - 5 = 8{,}5$
$19 \times 8{,}5 = 161{,}5$

43 Une autre présentation

1. Pour développer l'expression $(3x+4)(2x-5)$, on peut poser la multiplication comme ci-dessous.

$$\begin{array}{rrr} & 3x & +4 \\ \times & 2x & -5 \\ \hline \end{array}$$

Effectuer la multiplication sans oublier le décalage.

2. De la même manière, développer les expressions suivantes. Utilise la méthode que tu préfères.

$A = (4x-7)(x+8)$ $\quad B = (-2x+3)(x+2)$

$C = (5x-2)(-2x-1)$ $\quad D = (3x-5)^2$

Exercice 14 :

On considère les deux programmes de calcul suivants :

Programme n°1	**Programme n°2**
• Choisis un nombre	• Choisis un nombre
• Ajoute 6 à ce nombre	• Soustrais 3 à ce nombre
• Multiplie le résultat par −2	• Multiplie le résultat par 4
• Ajoute le quadruple du nombre de départ	• Soustrait le double du nombre de départ

1. a. Tester ces deux programmes de calcul avec 2 ; −3 et 4 comme nombres de départ.
   b. Que remarque-t-on ?

2. Prouver que les deux programmes donnent toujours le même résultat.

Exercice 15 :

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre.
- Soustraire 6.
- Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi.
- Ajouter 9.

1 Vérifier que lorsque le nombre choisi est 11, le résultat du programme est 64. **1 pt**

2 Lorsque le nombre choisi est −4, quel est le résultat du programme ? **1 pt**

3 Théo affirme que, quel que soit le nombre choisi au départ, le résultat du programme est toujours un nombre positif. A-t-il raison ? **2 pts**

Exercice 16 : relier l'expression développée à son expression factorisée.

$25x^2 + 30x + 9$	$(5x - 3)(5x + 3)$
$-10x - 9$	$(5x - 3)^2$
$25x^2 - 30x + 9$	$(5x + 3)^2$
$25x^2 - 9$	$5x - 3(5x + 3)$
$15x^2 + 16x - 15$	$(5x - 3)(3x + 5)$

Exercice 17 : entourer la ou les bonnes réponses

Enoncé	Proposition A	Proposition B	Proposition C
$(2x-5)^2$ a pour forme développée :	$4x^2 - 25$	$4x^2 - 20x - 25$	$4x^2 - 20x + 25$
$9x^2 - 144$ a pour forme factorisée :	$(3x-12)(3x+12)$	$(3x-12)^2$	$(9x-12)(9x+12)$
La factorisation de $9x^2 - 16$ est :	$(3x-4)^2$	$(3x+4)(3x-4)$	$(3x+4)^2$
L'expression factorisée de $4x^2 - 12x + 9$ est :	$(2x+3)(2x-3)$	$(2x+3)^2$	$(2x-3)^2$
$6 - 4(x-2)$ est égal à :	$2x - 4$	$14 - 4x$	$-2 - 4x$
$f(x) = 5x^2 + 2x - 3$. Par f, 0 a pour antécédent :	1	-3	-1
$g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. L'image de (-3) par g est :	36	-36	-6

Exercice 18: calculer sans calculatrice en utilisant les identités remarquables

1) 999×1001 ; **2)** 1001^2 ; **3)** 9999^2 ; **4)** $1\,000\,000\,001^2 - 1\,000\,000\,000^2$.

Exercice 19 : Trier les douze expressions ci-dessous en mettant d'un côté les expressions factorisées et de l'autre les expressions développées :

$(x+3)^2$	x^2-9	x^2+3x
x^2-3x	$(x-3)^2$	$(x+3)(x-3)$
$(x-2)(x+3)$	x^2+9+6x	$x(x+3)$
$x(x-3)$	x^2+5x+6	x^2-6x+9

<u>Exercice 20 :</u> Montrer que les programmes de calculs sont deux par deux équivalents.

PROGRAMME 1 • Choisir deux nombres quelconques • Calculer le carré de chacun d'eux. • Calculer la somme des carrés obtenus • Ajouter deux fois le produit des deux nombres.	**PROGRAMME 2** • Choisir deux nombres quelconques • Calculer le carré de chacun d'eux. • Calculer la somme des carrés obtenus • Retrancher deux fois le produit des deux nombres.	**PROGRAMME 3** • Choisir deux nombres quelconques • Calculer la somme des deux nombres choisis au départ • Calculer la différence des deux nombres choisis au départ • Calculer le produit de la somme et de la différence obtenus précédemment.
PROGRAMME 4 • Choisir deux nombres quelconques • Calculer la différence des deux nombres choisis • Calculer le carré de cette différence.	**PROGRAMME 5** • Choisir deux nombres quelconques • Calculer le carré de chacun d'eux. • Calculer la différence des carrés obtenus	**PROGRAMME 6** • Choisir deux nombres quelconques • Calculer la somme des deux nombres choisis • Elever cette somme au carré.

<u>Exercice 21 :</u> développer et factoriser (avec ou sans l'identité remarquable)

Développer les expressions suivantes.	Factoriser les expressions suivantes.
a. $(x+5)^2$ b. $(x-9)^2$ c. $(8+7x)^2$ d. $(4-3x)^2$ e. $(2+6x)(2-6x)$ f. $(5+4x)(-4x+5)$	a. $100-x^2$ c. $36x^2-25$ e. $49x^2-49$

Exercice 22 : Nombres pairs et impairs – le calcul littéral pour démontrer en arithmétique

65

Qui dit vrai ? Donner une preuve.

2.

Vrai ou faux ? Donner une preuve.

66 À l'aide d'un tableur, Johan a obtenu les résultats suivants :

	A	B
1	Nombre impair	Carré
2	3	9
3	17	289
4	21	441
5	105	11025

1. Quelle formule a-t-il entrée dans la case **B2** ?
2. Il affirme : « Le carré d'un nombre impair est un nombre impair. » Vrai ou faux ?

Exercice 23 : Dans chaque cas dire si la somme est paire ou impaire. Justifier.

1) On additionne un nombre pair et un nombre impair.
2) On additionne les carrés de deux nombres entiers consécutifs.

Exercice 24 : Khadim fait la proposition suivante :

« Pour calculer mentalement le carré d'un nombre se terminant par 5, je fais le produit du nombre de dizaines par le nombre suivant ce nombre pour trouver le nombre de centaines et après j'ajoute 25. »

VRAI ou FAUX ? Justifier.

Exercice 25 : Trouver la suite et démontrer.

$$1^2 + 1 = 2^2 - 2$$

$$2^2 + 2 = 3^2 - 3$$

$$3^2 + 3 = 4^2 - 4$$